Soluție

1.a) Se verifică prin calcul.

b) $A^3 = 9A \Rightarrow I_3 + A^3 = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 \\ 9 & 10 & 9 \\ 9 & 9 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(I_3 + A^3\right) = 28.$

c) Fie $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 & a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 & b_1+b_2+b_3 \\ c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_3 \end{pmatrix}$. Egalând elementele aflate pe poziții corespondente, obținem concluzia.

2.a) $\varepsilon^2 = -1-\varepsilon \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

b) $(a+b\varepsilon)\left(a+b\varepsilon^2\right) = a^2 - ab + b^2 \neq 0$, deci inversul lui $a+b\varepsilon$ este $\frac{a-b}{a^2-ab+b^2} - \frac{b}{a^2-ab+b^2}\varepsilon \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

c) $\left(a^2-ab+b^2\right)\left(c^2-cd+d^2\right) = \left|(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)\right|^2 = x^2 - xy + y^2$, unde $x = ac - bd \in \mathbb{Z}$ și $y = ad + bc - bd \in \mathbb{Z}$.